Concursul de matematică TMMATE

Ediţia a IV-a, Timişoara, 24.I.2009

clasa a VIII-a

1. Fie $N, n \in \mathbb{N}$, cu $n < 100$, două numere naturale, iar $A = \lfloor\sqrt{N}\rfloor$ şi $B = \lfloor\sqrt{100N+n}\rfloor$.
Arătaţi că :
a) $10A \leq B < 10(A+1)$.
b) Numărul $a = B - 10A$ verifică inegalităţile

$$(20A+a)a \leq 100(N-A^2)+n < (20A+a+1)(a+1)\,.$$

(Cu $\lfloor x\rfloor$ am notat partea întreagă a numărului real x.)

2. În planul α se consideră două triunghiuri $\Delta A_1B_1C_1$ şi $\Delta A_2B_2C_2$ cu laturile neparalele, cu proprietatea că dreptele A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2 sunt concurente într-un punct O. Fie, de asemenea, $U \in B_1C_1 \cap B_2C_2$, $V \in A_1C_1 \cap A_2C_2$, $W \in A_1B_1 \cap A_2B_2$, iar dreptele v şi w - perpendicularele în V, respectiv W, pe planul α. Pe perpendicularele în A_1, respectiv A_2, pe planul α considerăm punctele A_1', respectiv A_2', astfel încât $\frac{A_1A_1'}{A_2A_2'} = \frac{OA_1}{OA_2}$. Arătaţi că
a) dreptele $A_1'B_1$, $A_2'B_2$ şi w sunt concurente într-un punct W'.
b) dreptele $A_1'C_1$, $A_2'C_2$ şi v sunt concurente într-un punct V'.
c) punctele U, V' şi W' sunt coliniare.
d) punctele U, V şi W sunt coliniare.

3. a) Descompuneţi în factori expresia

$$3a^4 - 2a^3b - 2a^2b^2 - 2ab^3 + 3b^4\,.$$

b) Arătaţi că pentru orice numere reale $a, b \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{a^2+b^2}{2}\,.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru - 2 ore